PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA SIMPLE EN ESTÁTICA, UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL: NIVEL INTRODUCTORIO.

Problema 1.

Se tiene un sistema de cargas constituido por una esfera de radio R con una densidad de carga uniforme $\rho_V = \rho_0$ y una carga puntual positiva Q_0 ubicada en el centro de la esfera, el cual coincide con el origen de coordenadas.

a) Elaborar un bosquejo de esta distribución de cargas.

b) Explicar brevemente por qué el campo eléctrico producido por esta distribución de cargas es de la forma $\overline{E}(r) = \overline{1}_r E_r(r)$.

c) Determinar el campo eléctrico producido en todo el espacio por esta distribución de cargas.

d) Elaborar un bosquejo del campo eléctrico calculado.

Solución.

a) Bosquejo de la distribución de cargas.

Para elaborar el bosquejo, basta dibujar una esfera centrada en el origen y una carga puntual en su centro. El bosquejo se presenta en la figura 1 de la siguiente página.

b) Explicación de la forma del campo.

El campo sólo depende de la coordenada radial por la simetría del problema. Las componentes angulares del campo son nulas por la Ley de

Faraday en régimen estático para campos eléctricos que dependen de la coordenada radial. Por eso el campo es de la forma $\overline{E}(r) = \overline{1}r\, E_r(r)$.

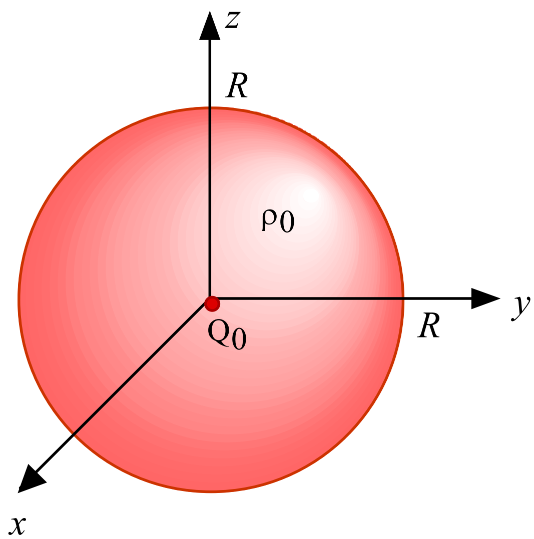


Fig. 1: Distribución de cargas del problema 1.

c) Cálculo del campo eléctrico.

Se utiliza la Ley de Gauss en forma diferencial: $\nabla \cdot \varepsilon_0 \overline{E}(\bar{r}) = \rho_V(\bar{r})$. Esta Ley hay que aplicarla por separado para cada volumen (dentro y fuera de la esfera). La solución de la ecuación diferencial provee la forma del campo, excepto por una constante. Para determinar la constante se debe aplicar la condición de frontera correspondiente a la Ley de Gauss en forma diferencial, o condiciones límite (en caso de que la región incluya el origen, el eje z ó el infinito).

CAMPO DENTRO DE LA ESFERA:

Aplicando la Ley de Gauss en forma diferencial, se tiene:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \varepsilon_0 E_r(r)\right) = \rho_0$$

Resolviendo:

$$d\left(r^2 \varepsilon_0 E_r(r)\right) = \rho_0 r^2 dr \Rightarrow r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = \int \rho_0 r^2 dr$$

Como la integral es indefinida, al resolverla queda una constante de integración:

$$r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = \int \rho_0 r^2 dr = \frac{\rho_0 r^3}{3} + C_1$$

Despejando:

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 r}{3 \varepsilon_0} + \frac{C_1}{r^2 \varepsilon_0}$$

El valor de la constante C_1 depende de la presencia (o ausencia) de carga puntual en el origen, como se verá a continuación.

Aplicando la Ley de Gauss en forma integral a un volumen esférico que rodee al origen, utilizando la expresión del campo recién obtenida:

$$\lim_{r \to 0} \oint_{S=\partial V} \varepsilon_0 E_r(r)\, da_r = Q\big|_{r=0} = \lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho_0 r}{3} + \frac{C_1}{r^2} \right) r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi C_1$$

Por lo tanto, $C_1 = Q_0 / (4\pi)$ en este caso (si no hubiese carga puntual en el origen, la constante sería nula). Sustituyendo en la expresión del campo, resulta:

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 r}{3 \varepsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

CAMPO FUERA DE LA ESFERA.

Aplicando nuevamente la Ley de Gauss en forma diferencial, se tiene:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \varepsilon_0 E_r(r)\right) = 0 \Rightarrow r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = C_2 \Rightarrow E_r(r) = \frac{C_2}{r^2 \varepsilon_0}$$

Nótese que se igualó a cero el término de la derecha porque fuera de la esfera no hay cargas.

Para determinar el valor de la constante, se aplica la condición de frontera correspondiente a la Ley de Gauss en forma diferencial en la superficie de la esfera:

$$\overline{1r} \cdot \left[\varepsilon_0 \overline{E}\Big|_{r=R^+} - \varepsilon_0 \overline{E}\Big|_{r=R^-}\right] = \eta\Big|_{r=R}$$

Sustituyendo los campos:

$$\frac{C_2}{R^2} - \left(\frac{\rho_0\ R}{3} + \frac{Q_0}{4\pi R^2}\right) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho_0\ R^3}{3} + \frac{Q_0}{4\pi}$$

Nótese que se igualó a cero el lado derecho de la condición de frontera, porque no hay cargas superficiales en $r = R$. Sustituyendo la constante en la expresión del campo, se obtiene finalmente:

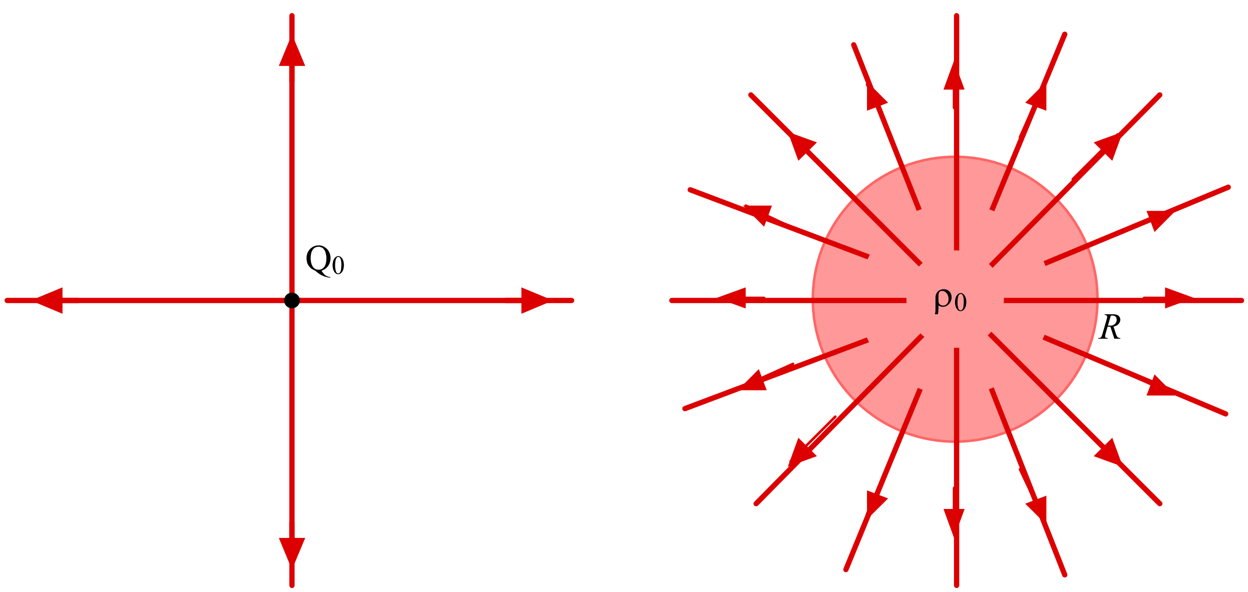
$$E_r(r) = \frac{\rho_0\ R^3}{3\ \varepsilon_0\ r^2} + \frac{Q_0}{4\pi\ \varepsilon_0\ r^2} = \frac{(4\pi / 3)\rho_0\ R^3 + Q_0}{4\pi\ \varepsilon_0\ r^2} = \frac{Q_{total}}{4\pi\ \varepsilon_0\ r^2}$$

En resumen, el campo eléctrico producido por este sistema de cargas es:

$$\overline{E}(r) = \begin{cases} \overline{1}_r \left(\dfrac{\rho_0\, r}{3\,\varepsilon_0} + \dfrac{Q_0}{4\pi\, r^2 \varepsilon_0} \right), \ \text{si } r \geq R,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi,\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \overline{1}_r\ \dfrac{(4\pi/3)\rho_0\, R^3 + Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2},\ \text{si } r \geq R,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi,\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

d) Bosquejo del campo.

El campo eléctrico es la superposición del campo de la carga puntual más el campo producido por la esfera cargada. En la figura 2 se ilustra por separado cada uno de los dos campos, y el campo eléctrico total se muestra en la figura 3 de la siguiente página. Se supuso para realizar los bosquejos que todas las cargas son positivas.



(a) (b)

Fig. 2: a) Campo eléctrico producido por la carga puntual.

b) Campo eléctrico producido por la esfera cargada.

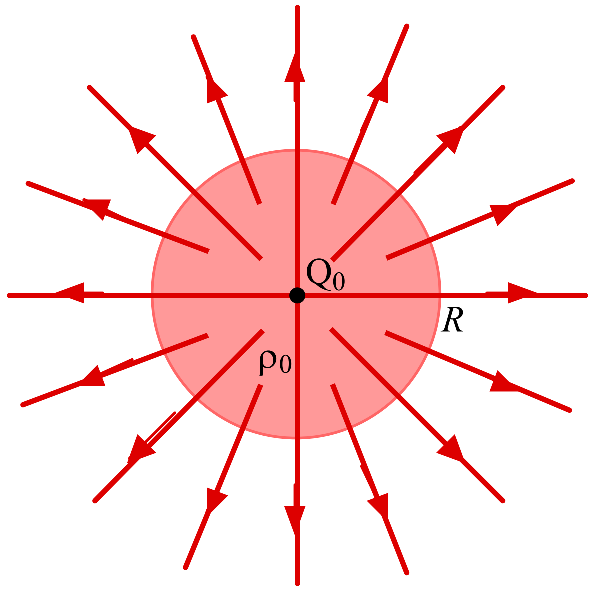


Fig. 3: Campo eléctrico total.